

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

| 日  | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 27 | 28 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 1  | 2  |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

多变量微积分笔记8——二重积分

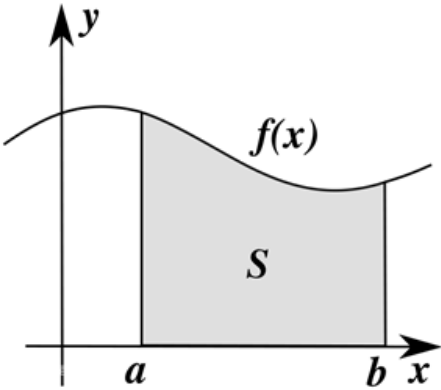
二重积分是二元函数在空间上的积分，同定积分类似，是某种特定形式的和的极限。本质是求曲顶柱体体积。重积分有着广泛的应用，可以用来计算曲面的面积，平面薄片重心等。平面区域的二重积分可以推广为在高维空间中的（有向）曲面上进行积分，称为曲面积分。

本篇涉及到的单变量积分的知识可参考《[数学笔记13——定积分](#)》

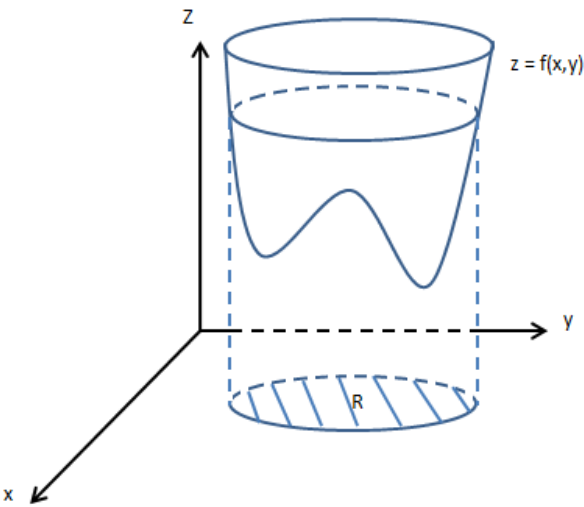
二重积分的意义

一元积分的被积函数是二维空间的曲线，其几何意义是计算曲线与x轴围成的面积；二重积分的被积函数是空间中的一个曲面，其几何意义是计算该曲面在xy平面的投影与该曲面围成的曲顶柱体的体积。

一元函数 $y = f(x)$ ,  $\int_a^b f(x) dx$  :



二元函数 $z = f(x,y)$ 的积分:



$f(x,y)$ 在xy平面的投影的区域是R，其二重积分称之为区域R上 $f(x,y)dA$ 的二重积分，表示为：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

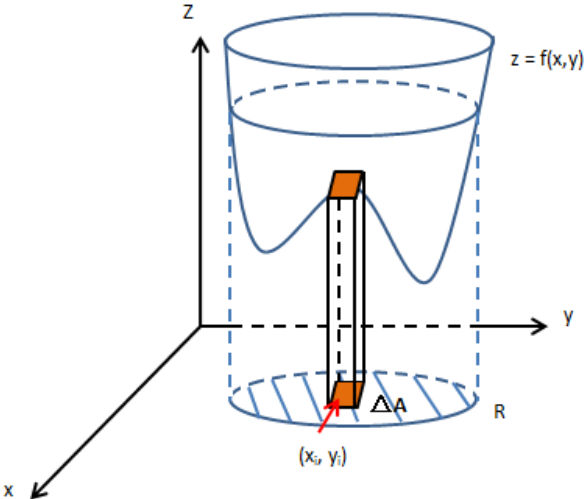
- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)  
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°  
--猫猫猫猫大人

$$\iint_R f(x,y)dA$$

dA表示R上的一小块面积。

用黎曼和计算体积

一元积分采用黎曼和分块，二重积分也是类似的思路，如下图所示：



R区域分成了多个小块，每块的面积是ΔA。设第i块的面积是ΔA<sub>i</sub>，ΔA<sub>i</sub>中心点在xy平面对应的值是(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)，那么第i小块的高是f(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)，面积是f(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)ΔA<sub>i</sub>：

$$V_R \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

这个式子对应三维空间中函数图像下方R区域内所有小柱体的体积之和。如果取积分，就是对所有小块面积ΔA取极限，使其趋近于0，就得到了二重积分：

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \right)$$

计算二重积分

计算方法的来源

在计算二重积分时，需要将一个二重积分的计算简化为两个单变量积分的计算，因此对于二重积分，所有在一元积分中的计算方法都适用。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

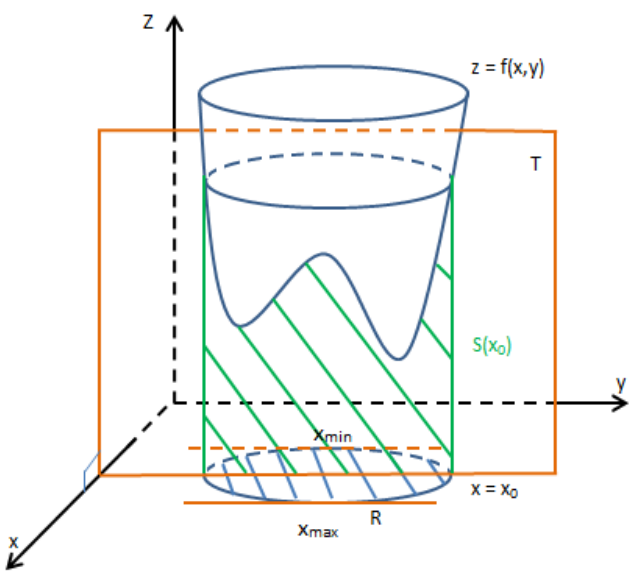
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中  $v = \{2gh\}^{1/2}$  与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

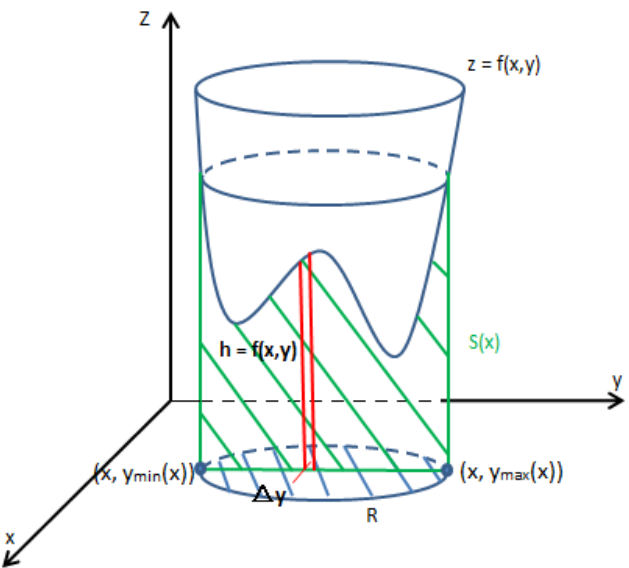


如上图所示，平面T与xz平面垂直且与y轴平行， $S(x_0)$ 是绿色阴影部分的面积。如果将T沿x轴垂直方向前后移动（但不能超过R区域），将会得到不同的面积 $S(x)$ ，将这些 $S(x)$ 相加（做积分），就会得到柱体的体积：

$$V_R = \int_{x_{min}}^{x_{max}} S(x) dx$$

积分上下限就是平面T与R区域的切点。

现在的问题是如何计算 $S(x)$ ？还是利用黎曼和的思想，将面积切割成小块，如下图所示：



小矩形的宽度是 $\Delta y$ ，高度是 $f(x, y)$ ，对于给定的x来说， $S(x)$ 实际上是关于变量y的积分：

$$s(x) = \int_{y_{min}(x)}^{y_{max}(x)} f(x, y) dy$$

积分域表示对于给定的切面 $S(x)$ ，x是定值，y是随着x变化的。

现在把两个积分式合并在一起，就得到了二重积分：

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} S(x) dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

通常将最后一步的括号省略：

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x, y) dy dx$$

实际上二重积分就是累次积分，它做了两次积分，先固定 $x$ ，对 $y$ 积分（计算切面面积 $S(x)$ ）；再固定 $y$ ，对 $x$ 积分（计算 $R$ 区域的体积）。

在这里 $dA$ 最终变成了 $dydx$ ，这是因为将 $R$ 区域的面积分成了无数个小矩形，矩形的长和宽就是 $dy$ 和 $dx$ ，小矩形面积 $dA = dydx$ ，由此看来先对 $x$ 积分和先对 $y$ 积分是一样的。

## 计算的一般过程

计算二重积分的一般过程就是分步积分，下面是一个示例。

计算 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上的积分。

重积分表达式是：

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \int_0^1 (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

第一步是计算内积分，将 $x$ 看作固定值，对 $y$ 做积分：

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - x^2 - y^2) dy &= \left( y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left( 1 - x^2 - \frac{1}{3} \right) - 0 \\ &= \frac{2}{3} - x^2 \end{aligned}$$

经过第一步后， $y$ 将从结果中消失。接下来计算外积分：

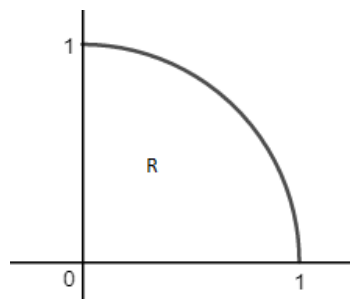
$$\int_0^1 \left( \frac{2}{3} - x^2 \right) dx = \left( \frac{2x}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

这就是最终答案了。

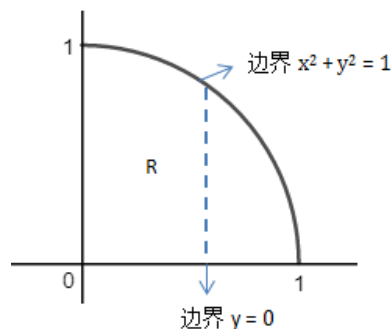
## 积分的边界

现在修改一下函数的定义域，如果约束 $x^2 + y^2 \leq 1$ 且 $x \geq 0, y \geq 0$ ，那么 $z$ 的二重积分是什么？

如下图所示， $R$ 区域实际上是1/4圆：



现在以 $y$ 为内积分， $x$ 为外积分，判断积分域。容易知道 $x$ 的取值范围是 $0 \leq x \leq 1$ ，而 $y$ 是受 $x$ 约束的：



在虚线上， $x$ 是定值， $y$ 的边界是 $y = 0$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ ，用 $x$ 表示 $y$ 就得到了内积分的边界值：

$$\iint_R (1 - x^2 - y^2) dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy &= \left( y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \left( (1 - x^2) y - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^{(1-x^2)^{1/2}} \\ &= \left( (1 - x^2)(1 - x^2)^{1/2} - \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3} \right) - 0 \\ &= \frac{2}{3} (1 - x^2)^{3/2} \end{aligned}$$

外积分使用三角替换（积分的三角替换可参考《[数学笔记20——三角替换1 \(sin和cos\)](#)》），令 $x = \sin\theta$ ， $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ， $dx = \cos\theta d\theta$ ：

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx &= \frac{2}{3} \int \cos^4 \theta d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int \left( \frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int \left( \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos^2 2\theta}{4} \right) d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4} \int d\theta + \frac{1}{2} \int \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{4} \int \left( \frac{1+\cos 4\theta}{2} \right) d\theta \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left( \frac{\theta}{4} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{1}{4} \left( \int \frac{1}{2} d\theta + \int \frac{\cos 4\theta}{2} d\theta \right) \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left( \frac{\theta}{4} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{1}{4} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{8} \right) \right) + C \\
 &= \frac{\theta}{4} + \frac{2}{3} \left( \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32} \right) + C
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \left( \frac{\theta}{4} + \frac{2}{3} \left( \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32} \right) \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

最终答案是 $\pi/8$

### 改变内外积分的顺序

由于先对 $x$ 积分和先对 $y$ 积分是一样，所以在某些情况下可以通过改变内外积分的顺序来使计算更加简单。需要注意的是，交换后内外积分的积分域也要随之改变：

$$\int_0^1 \int_2^3 dy dx = \int_2^3 \int_1^0 dx dy$$

#### 示例

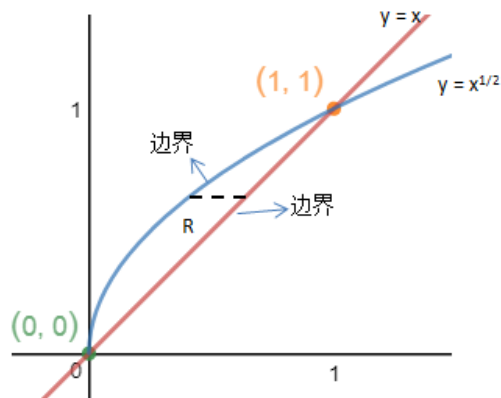
$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y} dy dx = ?$$

如果先计算内部积分，会发现很难，你会在第一步就卡住，无法继续计算，在这种情况下可以尝试改变内外积分的顺序。

改变顺序的时候要同时改变积分域，从原积分域中 $0 < x < 1$ ,  $x < y < x^{1/2}$ 可以看出， $0 < y < 1$ ，所以：

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y} dy dx = \int_0^1 \int_{x_{\max}(y)}^{x_{\max}(y)} \frac{e^y}{y} dx dy$$

现在的问题是 $x$ 如何受到 $y$ 的影响？如下图所示，结合积分域， $R$ 区域就是 $y = x$ 和 $y = x^{1/2}$ 这两条曲线所围成的部分：



在图中容易看出x的两个边界，右边界（x上限）是 $y = x$ ，左边界（x下限）是 $y = x^{1/2}$ 。如果改写成x关于y的表达式，则右边界 $x = y$ ，左边界 $x = y^2$ ，所以：

$$\int_0^1 \int_{x_{\max}(y)}^{x_{\min}(y)} \frac{e^y}{y} dx dy = \int_0^1 \int_{y^2}^y \frac{e^y}{y} dx dy$$

现在可以计算内部积分：

$$\int_{y^2}^y \frac{e^y}{y} dx = \frac{e^y}{y} x \Big|_{y^2}^y = e^y - ye^y$$

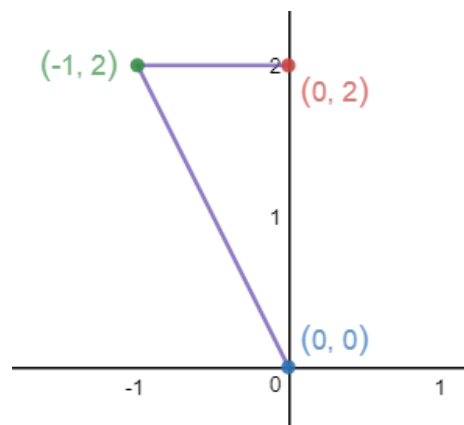
外部积分：

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^y - ye^y) dy &= \int_0^1 -(e^y + ye^y - 2e^y) dy \\ &= -\left( \int_0^1 (e^y + ye^y) dy - \int_0^1 2e^y dy \right) \\ &= -(ye^y - 2e^y) \Big|_0^1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

## 综合示例

### 示例1

如果R区域是(0,0), (0,2), (-1,2)三点围成的三角形，求 $\iint_R dx dy$ 和 $\iint_R dy dx$ 的积分域。



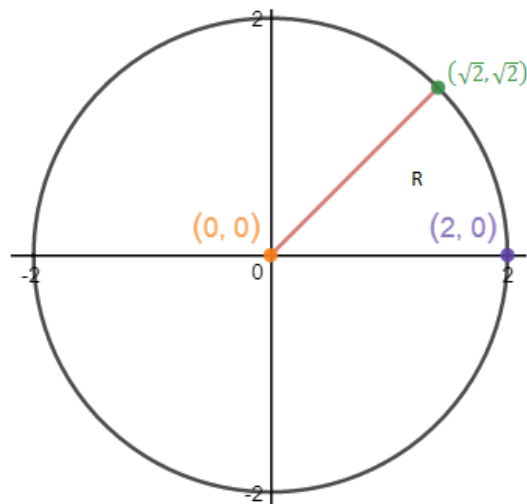
直角三角形就是R区域。

$$\iint_R dx dy = \int_0^2 \int_{-y/2}^0 dx dy$$

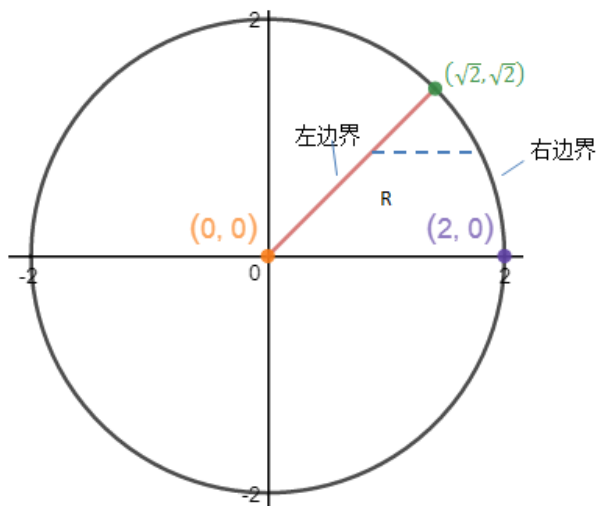
$$\iint_R dy dx = \int_{-1}^0 \int_{-2x}^2 dy dx$$

## 示例2

如果R区域是圆心在原点，半径为2的圆，直线 $y=x$ 的下方， $x$ 轴的上方共同围成的，求 $\iint_R dx dy$ 和 $\iint_R dy dx$ 的积分域。



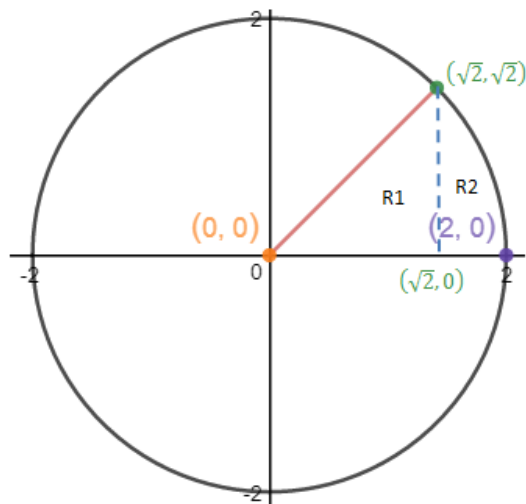
以 $y$ 为外积分， $dy$ 的上下边界是 $0, 2^{1/2}$ ；需要思考的是内积分的上下边界。



如上图所示，在虚线上， $y$ 值固定，虚线上的左边界是 $y = x$ ，右边界是圆 $x^2 + y^2 = 4$ ，所以在虚线上， $y < x < (4 - y^2)^{1/2}$ ，这就是内积分的边界。

$$\iint_R dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx dy$$

以 $x$ 为外积分看起来似乎没那么容易，此时 $R$ 区域需要分成两个部分，每个部分的内积分边界值是不同的：



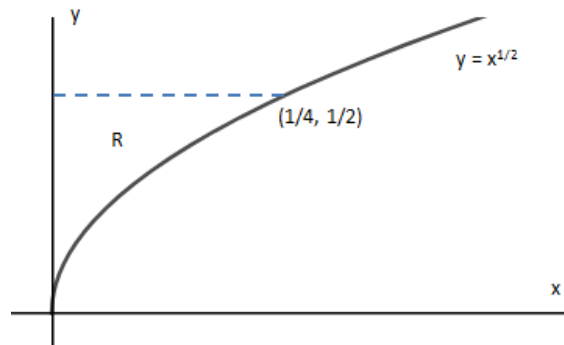
$$\begin{aligned}\iint_R dy dx &= \iint_{R1} dy dx + \iint_{R2} dy dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^x dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy dx\end{aligned}$$

### 示例3

计算  $\int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^y}{y} dy dx = ?$

改变积分顺序可以简化问题。

R区域如下图所示：



$$\int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^y}{y} dy dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{y^2} \frac{e^y}{y} dx dy$$

$$\int_0^{y^2} \frac{e^y}{y} dx = \frac{e^y}{y} x \Big|_0^{y^2} = ye^y$$

$$(ye^y)' = y'e^y + y(e^y)' = e^y + ye^y$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} ye^y dy = \int_0^{\frac{1}{2}} (e^y + ye^y) - e^y dy = ye^y - e^y \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}e^{1/2} + 1$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 多变量微积分

标签: 二重积分, 二元积分

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的  
关注 - 5  
粉丝 - 288  
[+加关注](#)

3

0

推荐

反对

« 上一篇: 多变量微积分笔记7——非独立变量  
» 下一篇: 多变量微积分笔记9——极坐标下的二重积分

posted on 2018-03-09 11:54 我是8位的 阅读(13044) 评论(2) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事  
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS\_文档在线  
预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
  - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
  - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
  - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
  - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:  
博客园

Copyright © 2022 我是8位的  
Powered by .NET 6 on Kubernetes